– Matrica linearnog operatora –

Neka je $A \in \mathcal{L}(U, V)$.
Neka su U i V vektorski prostori nad poljem P, $\dim U = n$, $\dim V = m$ i neka je $M_{m \times n}$ vektorski prostor matrica formata $m \times n$ sa elementima iz polja P. Ako je $e = (e_1, .., e_n)$ baza prostora U, i $f = (f_1, .., f_m)$ baza prostora V, tada se vektori $Ae_1, .., Ae_n$ mogu predstaviti kao linearna kombinacija baze f:

$$\left.\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \dots + a_{m1} f_m \\ &\vdots \\ Ae_j &= a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{mj} f_m \\ &\vdots \\ Ae_n &= a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \dots + a_{mn} f_m \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Matricu $A_{ef} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}$

nazivamo matricom linearnog operatora $A: U \to V$, u bazama e i f. Uočimo da su kolone

$$k_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, k_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \dots, k_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice A_{ef} sastavljene od koordinata vektora $Ae_1, .., Ae_j, .., Ae_n$ u bazi f.

Relacije (1) možemo zapisati u obliku:

$$Ae_1 = f\cdot k_1,\ Ae_2 = f\cdot k_2, \dots, Ae_j = f\cdot k_j, \dots, Ae_n = f\cdot k_n$$

tako da je $(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = (fk_1, fk_2, \dots, fk_n)$

odnosno $(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = f A_{ef}$. (2)

(koristimo oznake uvedene u lekciji "Matrica prelaza")

Koristićemo sledeću lemu koju smo dokazali u lekciji "Matrica prelaza".

Lema 1: Neka je $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ baza prostora V i $A, B \in M_{m\times n}$ proizvoljne matrice. Ako je $fA = fB$ tada je $A = B$.

Teorema 1: Neka je A_{ef} matrica operatora $A: U \to V$ u bazama $e = (e_1, \dots, e_n)$ i $f = (f_1, \dots, f_m)$ prostora U i V i neka je

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n;\ Ax = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_m f_m.$$

Tada je:

a) $Ax = f A_{ef}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix} = A_{ef}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

Dokaz: a) $Ax = A(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 Ae_1 + \dots + \alpha_n Ae_n =$

$$= (Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \underset{(2)}{=} f A_{ef}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

b) $f\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix} = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_m f_m =$

$$= Ax \underset{(a)}{\overset{\Downarrow}{=}} f A_{ef}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Dakle, $f\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix} = f A_{ef}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, pa iz leme 1 slijedi tvrđenje b).

Teorema2: (Teorema o jedinstvenosti)
Za svaku matricu $B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}$ i za proizvoljne baze $e = (e_1, \ldots, e_n)$ i $f = (f_1, \ldots, f_m)$ prostora U i V, postoji tačno jedan linearni operator $A: U \to V$ takav da je $A_{ef} = B$.

Dokaz: Neka je $A: U \to V$ preslikavanje koje vektoru $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ dodjeljuje vektor

$$Ax = fB\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \quad (3)$$

Dokažimo da je A linearni operator. Uzmimo vektore $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ i skalare $\lambda, \mu \in P$.

Tada je $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) e_i$

Na osnovu (3) dobijamo:

$$A(\lambda x + \mu y) = fB\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1\\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2\\ \vdots\\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n\end{pmatrix} = fB\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\alpha_2\\ \vdots\\ \lambda\alpha_n\end{pmatrix} + fB\begin{pmatrix}\mu\beta_1\\ \mu\beta_2\\ \vdots\\ \mu\beta_n\end{pmatrix} =$$

$$= \lambda f B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \mu f B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Kako je $Ax = fB \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $Ay = fB \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ slijedi da je:

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay,$$

što znači da je A linearni operator.

Dokazaćemo da je $A_{ef} = B$.

Kako je $e_j = 0 \cdot e_1 + \dots + 1 \cdot e_j + \dots + 0 \cdot e_n$, na osnovu (3) imamo:

$$Ae_j = fB \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (f_1, \dots, f_j, \dots, f_m) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} =$$

$$= b_{1j} f_1 + b_{2j} f_2 + \dots + b_{mj} f_m .$$

Dakle, j-tu kolonu matrice B čine koordinate vektora Ae_j u bazi f. Kako isto svojstvo ima i matrica A_{ef} slijedi da je $A_{ef} = B$.

Na kraju dokažimo jedinstvenost operatora A. Neka je $A' : U \to V$ linearni operator sa svojstv[om] $A'_{ef} = B$. Tada je $Ae_j = A'e_j$, $j = 1, 2, \dots, n$; pa na osnovu Teoreme 1 (lekcija "Linearni operatori") slijedi da je $A = A'$.

Napomena: Ako fiksiramo baze $e=(e_1,\dots,e_n)$ i $f=(f_1,\dots,f_m)$ u prostorima U i V, tada se može definisati preslikavanje vektorskog prostora $\mathcal{L}(U,V)$ u vektorski prostor matrica $M_{m\times n}$, koje operatoru $A\in\mathcal{L}(U,V)$ dodjeljuje njegovu matricu $A_{ef}\in M_{m\times n}$ u bazama e i f:

$$\phi: \mathcal{L}(U,V)\to M_{m\times n};\ \phi(A)=A_{ef}.$$

Na osnovu prethodne teoreme preslikavanje ϕ je bijekcija. Pokazuje se da je preslikavanje ϕ izomorfizam vektorskih prostora $\mathcal{L}(U,V)$ i $M_{m\times n}$.

~~Teorema~~: Razmotrimo sada vezu između matrica operatora $A\in\mathcal{L}(U,V)$ u različitim parovima baza prostora U i V.

Teorema 3: Neka su $e=(e_1,\dots,e_n)$ i $e'=(e_1',\dots,e_n')$ baze prostora U, $f=(f_1,\dots,f_m)$ i $f'=(f_1',\dots,f_m')$ baze prostora V. Neka su $P_{e\to e'}$ i $P_{f\to f'}$ matrice prelaza sa baze e na bazu e', odnosno sa baze f na bazu f'. Tada za matrice A_{ef} i $A_{e'f'}$ operatora $A\in\mathcal{L}(U,V)$ u bazama e i f, odnosno e' i f', važi jednakost:

$$A_{e'f'}=P_{f\to f'}^{-1}A_{ef}P_{e\to e'}$$

<u>Dokaz:</u> Na osnovu (2) važi:

$$(Ae_1', \dots, Ae_n') = f' A_{e'f'} \quad (***)$$

Ako je $P_{e\to e'} = [p_{ij}]_{n\times n}$, tada je:

$$e_j' = p_{1j} e_1 + \dots + p_{nj} e_n, \; j = 1, 2, \dots, n; \text{ odnosno}$$

$$Ae_j' = p_{1j} Ae_1 + \dots + p_{nj} Ae_n = (Ae_1, \dots, Ae_n) \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Relaciju $(*)$ možemo zapisati u obliku:

$$(Ae_1', \dots, Ae_n') = (Ae_1, \dots, Ae_n) P_{e\to e'}$$

Kako je $(Ae_1, \dots, Ae_n) = f A_{ef}$, to prethodnu jednakost možemo zapisati u obliku:

$$(Ae_1', \dots, Ae_n') = f A_{ef} P_{e\to e'}. \quad (**)$$

Kako je $f' = f P_{f\to f'}$ to je $f = f' P_{f\to f'}^{-1}$ pa zamjenom u $(**)$ dobijamo:

$$(Ae_1', \dots, Ae_n') = f' P_{f\to f'}^{-1} A_{ef} P_{e\to e'}.$$

Iz $(***)$ slijedi:

$$f' A_{e'f'} = f' P_{f\to f'}^{-1} A_{ef} P_{e\to e'}.$$

Iz Leme 1 dobijamo da je:

$$A_{e'f'} = P_{f\to f'}^{-1} A_{ef} P_{e\to e'}.$$

<u>Teorema 4:</u> Neka su U, V i W vektorski prostori nad poljem P, $e=(e_1, .., e_n)$, $f=(f_1, .., f_m)$ i $g=(g_1, .., g_p)$ ovim redom njihove baze, A_{ef} i B_{fg} matrice operatora $A: U \to V$ i $B: V \to W$ u bazama e i f, odnosno f i g. Tada za matricu $(BA)_{eg}$ proizvoda $BA: U \to W$ u bazama e i g važi jednakost:

$$(BA)_{eg} = B_{fg} A_{ef}$$

<u>Dokaz</u> Jednakost (2) (str. 2) primijenimo na operator BA:

$$((BA)e_1, .., (BA)e_n) = g\,(BA)_{eg} \quad (****)$$

Kolone matrice $A_{ef} = [a_{ij}]_{m \times n}$ su koordinate vektora Ae_j, $j=1,2,..,n$ u bazi f pa je:

$$(BA)e_j = B(Ae_j) = B\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Bf_i; \; j=1,..,n$$

Ovu relaciju možemo zapisati u matričnom obliku:

$$((BA)e_1, .., (BA)e_n) = (Bf_1, .., Bf_m) A_{ef}$$

a kako je $(Bf_1, .., Bf_m) = g B_{fg}$ to važi:

$((BA)e_1, .., (BA)e_n) = g B_{fg} A_{ef}$. Na osnovu $(****)$ imamo $g(BA)_{eg} = g B_{fg} A_{ef}$ pa je:

$$(BA)_{eg} = B_{fg} A_{ef}.$$

Napomena: Za slučaj kad je $A: V \to V$ linearni operator, Teoremu 3 i Teoremu 4 formulišemo na sledeći način:

<u>Teorema 6:</u> Ako su A_e i A_f matrice operatora $A: V \to V$ u bazama $e=(e_1, \dots, e_n)$ i $f=(f_1, \dots, f_n)$ prostora V, tada je:

$$A_f = P_{e\to f}^{-1} A_e P_{e \to f}$$

gdje je $P_{e\to f}$ matrica prelaza sa baze e na bazu f.

<u>Teorema 7:</u> Ako su A_e i B_e matrice operatora $A: V \to V$ i $B: V \to V$, u bazi $e=(e_1, \dots, e_n)$ prostora V, tada za matricu $(AB)_e$ proizvoda $AB: V \to$ u ~~toj bazi~~ važi jednakost:

$$(AB)_e = A_e B_e .$$